

# Spis treści

<b>Przedmowa</b>	<b>3</b>
<b>1 Element skończony. Przestrzeń elementów skończonych. Baza.</b>	<b>9</b>
1.1 Element skończony i jego własności. . . . .	9
1.2 Przestrzeń elementów skończonych. . . . .	10
1.3 Baza przestrzeni elementów skończonych. . . . .	12
1.4 Przykłady. . . . .	14
1.5 Ćwiczenia. . . . .	19
<b>2 Elementy skończone i ich przestrzenie konstruowane na sympleksach.</b>	<b>21</b>
2.1 $n$ -sympleks i współrzędne barycentryczne. . . . .	21
2.2 Przestrzeń wielomianów $P_m(K)$ . . . . .	23
2.3 Twierdzenie o interpolacji w $\mathbb{R}^1$ . . . . .	23
2.4 Elementy typu $L_1$ . . . . .	24
2.5 Trójkąt Argyrisa. . . . .	24
2.6 Przestrzenie konstruowane na sympleksach. . . . .	28
2.7 Inne przykłady elementów skończonych konstruowanych na sympleksach. . . . .	30
2.8 Ćwiczenia. . . . .	33
<b>3 Elementy skończone i ich przestrzenie konstruowane na kostkach.</b>	<b>34</b>
3.1 Przestrzeń wielomianów $Q_m(K)$ . . . . .	34
3.2 Iloczyn tensorowy przestrzeni liniowych skończone wymiarowych funkcji. . . . .	34
3.3 Elementy typu $Q_1$ . . . . .	35
3.4 Prostokąt Bognera-Foxa-Schmita. . . . .	36
3.5 Przestrzenie konstruowane na kostkach. . . . .	37
3.6 Inne przykłady elementów konstruowanych na kostkach. . . . .	40
3.7 Ćwiczenia. . . . .	41
<b>4 Interpolacja w przestrzeni elementów skończonych.</b>	<b>43</b>
4.1 Interpolacja naturalna na elemencie. . . . .	43

4.2	Interpolacja naturalna w przestrzeni elementów skończonych. . . . .	45
4.3	Inne interpolacje w przestrzeni elementów skończonych. . . . .	46
<b>5</b>	<b>Aproksymacja średniokwadratowa funkcjami z przestrzeni elementów skończonych.</b>	<b>49</b>
5.1	Zadanie aproksymacji w przestrzeni Hilberta. . . . .	49
5.2	Aproksymacja średniokwadratowa ciągła. . . . .	50
5.3	Uwagi o uwarunkowaniu i rozwiązywaniu układów równań normalnych oraz o całkowaniu numerycznym. . . . .	56
<b>6</b>	<b>Pochodna uogólniona. Przestrzeń Sobolewa i pewne jej własności.</b>	<b>58</b>
6.1	Pochodna uogólniona. . . . .	58
6.2	Przestrzeń Sobolewa. . . . .	61
6.3	Nierówność Friedrichsa. Równoważność normy i seminormy w przestrzeniach $H_0^m(\Omega)$ . . . . .	62
6.4	Wartości funkcji na brzegu obszaru. Operacja śladu. . . . .	63
6.5	Formuły Greena w przestrzeniach Sobolewa. . . . .	67
6.6	Twierdzenie Sobolewa o zanurzeniu. . . . .	68
6.7	Twierdzenia o zawieraniu przestrzeni elementów skończonych w przestrzeniach Sobolewa. . . . .	68
<b>7</b>	<b>Zadanie wariacyjne i zadanie przybliżone. Ogólne oszacowanie błędu.</b>	<b>70</b>
7.1	Zadanie wariacyjne. Twierdzenie Laxa-Milgrama. . . . .	70
7.2	Zadanie przybliżone. . . . .	71
7.3	Rozwiązanie zadania wariacyjnego a poszukiwanie minimum pewnego funkcjonału. . . . .	73
<b>8</b>	<b>Przykłady zadań Laxa-Milgrama w przestrzeniach Sobolewa.</b>	<b>74</b>
8.1	Zagadnienie brzegowe Dirichleta dla równania zwyczajnego rzędu drugiego. . . . .	74
8.2	Zagadnienie brzegowe Neumanna dla równania zwyczajnego rzędu drugiego. . . . .	79
8.3	Zagadnienie brzegowe Dirichleta dla równania eliptycznego rzędu drugiego w $\mathbb{R}^2$ . . . . .	80
8.4	Zagadnienie brzegowe Neumanna dla równania eliptycznego rzędu drugiego w $\mathbb{R}^2$ . . . . .	83
8.5	Zagadnienie brzegowe dla równania biharmonicznego w $\mathbb{R}^2$ . . . . .	85
<b>9</b>	<b>Metoda elementów skończonych dla zagadnień eliptycznych.</b>	<b>88</b>
9.1	Sposoby generowania układów równań liniowych. . . . .	88

9.2	Metoda elementów skończonych dla zagadnień brzegowych zwyczajnych rzędu drugiego z zastosowaniem elementów liniowych. . . . .	91
9.3	Metoda elementów skończonych dla zagadnień brzegowych zwyczajnych rzędu drugiego z zastosowaniem elementów kubicznych. . . . .	95
9.4	Metoda elementów skończonych dla zagadnień brzegowych dla równań eliptycznych rzędu drugiego w $\mathbb{R}^2$ z zastosowaniem elementów liniowych. . . . .	99
9.5	Uwagi o uwarunkowaniu i rozwiązywaniu układów równań wynikających z MES oraz o całkowaniu numerycznym. . . . .	107
<b>10</b>	<b>Oszacowanie błędu metody elementów skończonych.</b>	<b>109</b>
10.1	Elementy afinicznie równoważne. Błąd interpolacji dla elementów afinicznie równoważnych. . . . .	109
10.2	Regularne rodziny pokryć. Rodzina przestrzeni afinicznych elementów skończonych. Błąd interpolacji w przestrzeni elementów skończonych. . . . .	112
10.3	Oszacowanie błędu metody elementów skończonych dla zadań eliptycznych. . . . .	116
<b>11</b>	<b>Metoda elementów skończonych dla zadań niestacjonarnych.</b>	<b>118</b>
11.1	Zagadnienie początkowo-brzegowe dla równania parabolicznego. . . . .	118
11.2	Zagadnienie początkowo-brzegowe dla równania hiperbolicznego. . . . .	121
	<b>Bibliografia</b>	<b>123</b>