

Przedmowa.....	11
Rozdział I. Teoria płyt Kirchhoffa.....	13
1. Założenia i podstawowe zależności.....	13
1.1. Podstawowe założenia.....	13
1.2. Stan przemieszczenia i odkształcenia.....	14
1.3. Stan naprężenia i izotropowe związki fizyczne.....	15
1.4. Wyznaczenie składowych wektora naprężenia ścinającego.....	16
2. Lokalne równania równowagi i uogólnione siły wewnętrzne.....	17
2.1. Momenty i siły poprzeczne.....	17
2.2. Równania równowagi płyty.....	19
2.3. Siły i momenty wewnętrzne w funkcji pochodnych ugięcia płyty.....	20
3. Równanie przemieszczeniowe Germain-Lagrange'a.....	21
4. Zastępcze siły Kirchhoffa.....	22
5. Zagadnienia brzegowe teorii płyt.....	24
6. Płyty spoczywające na sprężystym podłożu.....	26
7. Wyprowadzenie podstawowych równań teorii płyt anizotropowych.....	27
7.1. Płyty ortotropowe.....	27
7.2. Płyty anizotropowe oraz przypadki szczególne, płyty ortotropowe, płyty o symetrii regularnej i płyty izotropowe.....	30
8. Płyty o ortotropii technicznej.....	33
Rozdział II. Zginanie walcowe pasm płytowych.....	36
1. Zginanie walcowe izotropowych lub ortotropowych pasm płytowych.....	36
1.1. Płyty izotropowe.....	36
1.2. Jednородne ortotropowe pasma płytowe.....	39
2. Statycznie wyznaczalne i statycznie niewyznaczalne zginanie walcowe pasm płytowych.....	40
2.1. Równania równowagi i uwagi o rozwiązywaniu zadań statycznie wyznaczalnych.....	40
2.2. Przykłady zadań statycznie wyznaczalnych i niewyznaczalnych.....	43
2.2.1. Płyta swobodnie podparta obciążona równomiernie.....	43
2.2.2. Płyta wspornikowa.....	46
2.2.3. Pasma płytowe statycznie niewyznaczalne.....	51
2.2.4. Pasma płytowe statycznie niewyznaczalne – zastosowanie programu Mathematica.....	52
3. Przykładowe zadania dotyczące zginania pasm płytowych.....	54
3.1. Pasma płytowe o rozwiązaniach bez całek szczególnych.....	54
3.1.1. Podstawowe równania.....	54
3.1.2. Pasma płytowe swobodnie podparte, obciążone na brzegu momentami.....	55
3.1.3. Pasma swobodnie podparte, obciążone wzdłuż linii w środku rozpiętości.....	58

3.2.	Pasma płytowe o rozwiązaniach z całkami szczególnymi	60
3.2.1.	Podstawowe równania.....	60
3.2.2.	Pasma utwierdzone, obciążone równomiernie.....	60
3.2.3.	Pasma wspornikowe obciążone równomiernie.....	63
3.2.4.	Pasma płytowe na jednym brzegu swobodnie podparte, a na drugim utwierdzone, obciążone równomiernie	64
4.	Zastosowanie dystrybucji Diraca i funkcje Greena	65
4.1.	Dystrybucje Diraca i Heaviside'a.....	65
4.2.	Pasma płytowe swobodnie podparte, obciążone wzdłuż prostej.....	67
4.2.1.	Rozwiązanie zadania brzegowego z zastosowaniem dystrybucji.....	67
4.2.2.	Funkcje Greena dla pasma płytowego swobodnie podpartego.....	70
4.3.	Funkcje Greena i ich zastosowanie w typowych pasmach płytowych.....	71
4.3.1.	Funkcje Greena i zasada superpozycji.....	71
4.3.2.	Przykłady zastosowania funkcji Greena	72
4.4.	Funkcje Greena w programie Mathematica.....	75
5.	Pasma płytowe o zmiennej sztywności.....	78
5.1.	Podstawowe równania	78
5.2.	Pasma płytowe o zmiennym module Younga swobodnie podparte, obciążone równomiernie	79
5.3.	Zastosowanie programu Mathematica do zagadnień pasm o zmiennej wysokości.....	80

Rozdział III. Zginanie walcowe pasma płytowego na sprężystym podłożu

1.	Zależności podstawowe	84
1.1.	Rozwiązanie jednorodnego równania różniczkowego na ugięcie płyty.....	84
1.2.	Uwagi o rozwiązaniu zadania pasma płytowego obciążonego równomiernie	85
2.	Przykłady wstępne	89
2.1.	Nieskończona płyta obciążona momentem rozłożonym na linii	89
2.2.	Płyta w kształcie półpłaszczyzny obciążona równomiernie na brzegu	91
2.3.	Nieskończona płyta obciążona równomiernie na linii	93
3.	Symetryczne pasma płytowe.....	101
3.1.	Podstawowe zależności	101
3.2.	Zadania bez całki szczególnej	101
3.2.1.	Płyta swobodnie spoczywająca na sprężystym podłożu, obciążona momentami na brzegu	101
3.2.2.	Płyta swobodnie podparta, obciążona momentami na brzegu	104
3.2.3.	Płyta swobodnie spoczywająca na sprężystym podłożu, obciążona siłami na brzegu.....	106
3.3.	Pasma płytowe obciążone równomiernie	106
3.3.1.	Płyta swobodnie podparta, równomiernie obciążona.....	106
3.3.2.	Płyta utwierdzone, równomiernie obciążona	107
3.4.	Wybrane przykłady i ćwiczenia.....	108
4.	Przykłady – płyty w kształcie płaszczyzny lub półpłaszczyzny	108
4.1.	Nieskończona płyta na sprężystym podłożu obciążona na pasie.....	108
4.2.	Płyta w kształcie półpłaszczyzny obciążona na pasie przy brzegu	112
5.	Pasma płytowe	114
5.1.	Pasma równomiernie obciążone na linii.....	114
5.2.	Pasma obciążone równomiernie na powierzchni i siłą na linii.....	116

Rozdział IV. Zależności teorii płyt anizotropowych w zapisie tensorowym	121
1. Podstawowe równania i zależności liniowej teorii sprężystości	121
1.1. Uwagi wstępne	121
1.2. Sformułowanie zagadnienia brzegowego	122
2. Sformułowanie zadania statyki płyt w notacji absolutnej	124
2.1. Płyty izotropowe	124
2.2. Płyty anizotropowe	128
3. Energia sprężystości w płytach izotropowych i anizotropowych	130
4. Płyty z kompozytów włóknistych	131
4.1. Płaski stan naprężenia, matryca zbrojona kilkoma rodzinami włókien	131
4.2. Typy symetrii materiału	132
4.3. Przykłady	133
5. Płyty żelbetowe	134
6. Przykłady ilustrujące podstawowe zależności i równania teorii płyt	136
6.1. Trójkątna płyta równoboczna	136
6.1.1. Swobodnie podparta płyta, obciążona równomiernie na brzegach rozłożonymi momentami	136
6.1.2. Swobodnie podparta płyta, obciążona równomiernie	139
6.2. Zastosowanie rozwiązań osobliwych	142
6.3. Utwierdzona anizotropowa płyta eliptyczna obciążona równomiernie	146
Rozdział V. Równania jednorodnych płyt izotropowych we współrzędnych biegunowych	151
1. Układy współrzędnych kartezjańskich, walcowych i biegunowych	151
2. Współrzędne biegunowe	152
2.1. Lokalna baza i kobaza oraz baza fizyczna	152
2.2. Gradient, dywergencja, laplasjan i bilaplasjan	154
3. Wyprowadzenie podstawowych równań teorii płyt izotropowych we współrzędnych biegunowych	156
3.1. Kąty obrotu przekrojów poprzecznych płyty	156
3.2. Laplasjan i bilaplasjan oraz równanie różniczkowe ugięcia płyty	157
3.3. Tensor krzywizn i tensor momentów	158
3.4. Siły poprzeczne	159
Rozdział VI. Płyty o symetrii kołowej	161
1. Ogólne rozwiązanie zadania zginania izotropowych płyt kołowych i pierścieniowych	161
2. Ćwiczenia wstępne	167
2.1. Zależności podstawowe	167
2.2. Przykłady	168
2.2.1. Swobodnie podparta płyta kołowa obciążona momentem na brzegu	168
2.2.2. Płyta swobodnie podparta i płyta utwierdzona obciążona równomiernie	170
2.2.3. Płyta pierścieniowa obciążona równomiernie	177
2.2.4. Płyty pierścieniowe obciążone na brzegu równomiernie rozłożonymi siłami	179
2.2.5. Płyta swobodnie podparta i płyta utwierdzona obciążona siłą skupioną	183
2.3. Uwagi o funkcji Greena dla płyt nieograniczonych	186
3. Pełne płyty kołowe	187
3.1. Pełne płyty kołowe utwierdzone i swobodnie podparte	187
3.2. Płyty z podporą w środku	189
3.2.1. Płyta swobodnie podparta z podporą w środku, obciążona na brzegu równomiernie rozłożonymi momentami	189
3.2.2. Płyty obciążone równomiernie	192

4. Płyty pierścieniowe	195
4.1. Płyty pierścieniowe obciążone równomiernie	195
4.1.1. Podstawowe wzory.....	195
4.1.2. Przykłady.....	196
4.2. Zadania bez całek szczególnych	198
4.2.1. Swobodnie podparta płyta kołowa z otworem obciążona momentem na brzegu	198
4.2.2. Utwierdzona płyta kołowa z otworem obciążona momentem na brzegu	200
5. Płyty ze wspornikiem	205
5.1. Płyta ze wspornikiem obciążona momentem	205
5.2. Płyta ze wspornikiem obciążona równomiernie	207
6. Wybrane zadania	208
6.1. Pełne płyty kołowe obciążone równomiernie na części obszaru	208
6.2. Płyty wieloprzęsłowe.....	211
7. Płyty kołowo symetryczne na sprężystym podłożu – zastosowanie programu Mathematica.....	211

Rozdział VII. Podwójne szeregi trygonometryczne Fouriera w zastosowaniu do zagadnień brzegowych teorii płyt.....

1. Podwójne szeregi sinusowe.....	218
1.1. Rozwiązanie zadania Naviera.....	218
1.2. Zestawienie wzorów na wielkości kinematyczne i statyczne.....	222
1.3. Płyty prostokątne na sprężystym podłożu	224
1.4. Przykłady wyznaczania współczynników obciążenia i ugięcia płyty w podwójnych szeregach sinusowych.....	225
1.4.1. Płyta swobodnie podparta, obciążona siłą skupioną	225
1.4.2. Płyta swobodnie podparta, obciążona siłami rozłożonymi równomiernie na linii	226
1.4.3. Płyty swobodnie podparte, obciążone powierzchniowo	227
1.5. Zasada superpozycji i funkcja Greena	236
1.6. Trajektorie krzywizn i momentów głównych.....	240
1.7. Płyta w postaci prostokątnego trójkąta równoramiennego	242
2. Podwójne szeregi trygonometryczne w płytach ortotropowych	243
2.1. Podstawowe zależności	243
2.2. Przykłady	246
3. Podwójne szeregi sinusowo-kosinusowe	249
3.1. Podstawowe zależności	249
3.2. Przykłady zastosowania szeregów kosinusowo-sinusowych	250
3.2.1. Obciążenie na linii.....	250
3.2.2. Obciążenie na linii – zginanie walcowe.....	251
3.2.3. Obciążenie siłą punktową	252
3.2.4. Półpasmo obciążone periodycznie	253
4. Podwójne szeregi kosinusowo-kosinusowe	255
4.1. Podstawowe zależności	255
4.2. Przykłady zastosowania szeregów kosinusowo-kosinusowych	257
4.2.1. Płyta spoczywająca na słupie, obciążona siłą skupioną.....	257
4.2.2. Płyta spoczywająca na słupie, obciążona równomiernie na powierzchni prostokąta.....	258
5. Wybrane przykłady zastosowania podwójnych szeregów trygonometrycznych	259
5.1. Uwagi o zastosowaniach podwójnych szeregów trygonometrycznych.....	259
5.2. Płyty wzmocnione żebrem.....	259
6. Zastosowanie podwójnych szeregów sinusowych w programie Mathematica	262
6.1. Płyta swobodnie podparta, obciążona punktowo.....	262
6.2. Płyta swobodnie podparta, obciążona wzdłuż krzywej	266

Rozdział VIII. Zastosowanie pojedynczych szeregów trygonometrycznych Fouriera	269
1. Płyty izotropowe	269
1.1. Rozwiązanie ogólnego zadania Lévy'ego	269
1.2. Przykłady	273
2. Pojedyncze szeregi trygonometryczne w płytach ortotropowych.....	275
2.1. Dyskusja ogólnych rozwiązań zadania zginania płyt	275
2.2. Przykłady określania typu rozwiązania zadania dla różnych materiałów ortotropowych	278
3. Płyty izotropowe i ortotropowe na sprężystym podłożu.....	281
4. Zastosowanie szeregów pojedynczych w półpasmach	283
4.1. Ogólne zależności	283
4.2. Przypadki szczególne podparcia półpasma płytowego.....	285
4.2.1. Utwierdzenie z przesuwem – zginanie walcowe	285
4.2.2. Brzeg swobodnie podparty.....	287
4.2.3. Utwierdzenie	288
4.2.4. Brzeg swobodny	290
4.3. Przykłady pasm i półpasm płytowych o różnych warunkach brzegowych	292
5. Płyty symetryczne	297
5.1. Uwagi wstępne.....	297
5.2. Płyty izotropowe.....	298
5.2.1. Płyta prostokątna swobodnie podparta.....	298
5.2.2. Płyta na dwóch brzegach swobodnie podparta i na dwóch brzegach utwierdzona.....	300
5.2.3. Płyta na dwóch brzegach swobodnie podparta i na dwóch brzegach swobodna	301
5.3. Płyty ortotropowe	302
5.3.1. Płyta na dwóch brzegach swobodnie podparta i na dwóch brzegach utwierdzona.....	302
6. Płyty o różnych warunkach brzegowych	304
6.1. Uwagi	304
6.2. Swobodnie podparta płyta prostokątna zginana momentami rozłożonymi wzdłuż krawędzi.....	306
6.2.1. Obciążenie symetryczne.....	307
6.2.2. Obciążenie antysymetryczne.....	308
6.2.3. Obciążenie dowolne	309
6.3. Wybrane przykłady	309
Rozdział IX. Zastosowanie szeregów trygonometrycznych Fouriera we współrzędnych biegunowych	311
1. Zestawienie podstawowych zależności.....	311
1.1. Uwagi wstępne.....	311
1.2. Płyty o kształcie koła i pierścienia obciążone niesymetrycznie	313
2. Płyty o kształcie wycinka koła lub pierścienia – zastosowanie pojedynczych szeregów sinusowych.....	316
2.1. Podstawowe zależności	316
2.2. Płyta półkolistą obciążona równomiernie.....	318
2.2.1. Płyta półkolistą swobodnie podparta	319
2.2.2. Płyta półkolistą swobodnie podparta na brzegu prostoliniowym i utwierdzona na brzegu krzywoliniowym.....	320
3. Płyty kołowe, pierścieniowe i półkoliste z niesymetrycznym obciążeniem liniowym.....	321
3.1. Sformułowanie rozpatrywanych zadań i zestawienie wzorów	321
3.2. Płyta pierścieniowa.....	322
3.3. Płyta kołowa zamknięta.....	323
3.4. Przykłady	324

Rozdział X. Metody wariacyjne	327
1. Metody Ritza-Timoshenki i Bubnowa-Galerkina.....	327
1.1. Uwagi wstępne.....	327
1.2. Metoda Ritza-Timoshenki.....	328
1.3. Metoda Bubnowa-Galerkina.....	329
2. Przykłady wstępne.....	330
2.1. Zginanie walcowe płyt obustronnie utwierdzonej i obustronnie swobodnie podpartej ..	330
2.1.1. Płyta utwierdzona.....	330
2.1.2. Płyta swobodnie podparta.....	332
2.1.3. Różne przykłady obciążenia.....	333
2.2. Zginana walcowo płyta na jednym z brzegów utwierdzone.....	338
2.2.1. Swobodnie podparty drugi brzeg płyty.....	338
2.2.2. Płyta wspornikowa.....	339
2.3. Płyta prostokątna przegubowo podparta na wszystkich brzegach.....	341
2.3.1. Obciążenie równomierne.....	341
2.3.2. Obciążenie w środku siłą skupioną.....	343
2.3.3. Płyta ortotropowa.....	344
2.4. Płyta prostokątna na dwóch brzegach przegubowo podparta, zaś na dwóch utwierdzo- na, obciążona siłą skupioną w środku.....	346
2.4.1. Metoda R-T.....	347
2.4.2. Metoda B-G.....	348
2.4.3. Płyta ortotropowa.....	349
2.5. Utwierdzone płyta prostokątna.....	350
2.5.1. Płyta izotropowa.....	350
2.5.2. Płyta ortotropowa.....	352
3. Przykłady zastosowania metod wariacyjnych w przypadku płyt kołowo symetrycznych.....	353
3.1. Funkcja energii sprężystości.....	353
3.2. Płyta kołowa utwierdzone na obwodzie.....	354
3.3. Płyta kołowa podparta przegubowo na obwodzie.....	360
3.3.1. Płyta kołowa podparta przegubowo, obciążona równomiernie.....	360
3.3.2. Płyta kołowa podparta przegubowo na obwodzie, obciążona siłą P w środku.....	364
3.4. Płyta kołowa na sprężystym podłożu obciążona siłą w środku.....	367
3.5. Wybrane przykłady zagadnień kołowo symetrycznych.....	369
Dodatek. Przykłady rozwiązań zadań brzegowych w programie Mathematica	371
1. Elementy środowiska pakietu Mathematica.....	371
2. Przykłady rozwiązań zadań izotropowych płyt Kirchhoffa.....	375
2.1. Zginanie walcowe na podłożu Winklera z uwzględnieniem więzów jednostronnych.....	375
2.2. Funkcja Greena w podwójnych szeregach sinusowych.....	379
2.3. Płyta swobodnie podparta, obciążona na obszarze trójkątnym.....	379
2.4. Płyta swobodnie podparta, obciążona na obszarze kołowym.....	383
2.5. Płyta swobodnie podparta, obciążona momentami równomiernie na dwóch krawę- dziach.....	387
3. Przykłady zastosowania metod aproksymacyjnych do rozwiązywania zadań anizotropo- wych płyt Kirchhoffa.....	389
3.1. Płyta o ortotropii technicznej utwierdzone na wszystkich brzegach.....	390
3.2. Płyta o ortotropii technicznej swobodnie podparta na wszystkich brzegach.....	395
Bibliografia.....	398

PRZEDMOWA

Skrypt jest uzupełnieniem podręcznika: S. Jemioło, A. Szwed pt. „Płyty i membrany oraz skręcanie prętów pryzmatycznych”, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, którego ukazały się dwa wydania. Tematem skryptu jest zastosowanie teorii Kirchhoffa dotyczącej płyt izotropowych i ortotropowych. Omówiono podstawowe sformułowania zagadnień brzegowych i metody ich rozwiązywania. W szczególności przedstawiono zastosowanie pojedynczych i podwójnych szeregów Fouriera oraz metod wariacyjnych. Zamieszczono liczne przykłady rozwiązań zadań z podaniem wyników w formie graficznej, z ich interpretacją i potencjalnymi zastosowaniami, m.in. w budownictwie. Zastosowano program do obliczeń symbolicznych i numerycznych Mathematica.

Skrypt jest przeznaczony dla studentów wyższych uczelni technicznych kształcących się na kierunku budownictwo, pracowników naukowych, a także może być przydatny dla inżynierów projektantów. Opracowanie dotyczy zagadnień, które są realizowane głównie na drugim semestrze wykładów i ćwiczeń z Teorii Sprężystości i Plastyczności na studiach II stopnia Wydziału Inżynierii Lądowej Politechniki Warszawskiej. Należy zaznaczyć, że skrypt może być wykorzystywany także przez studentów innych uczelni oraz w innych przedmiotach, np. w mechanice gruntów i fundamentowania, mechanice nawierzchni komunikacyjnych, projektowaniu konstrukcji stalowych i betonowych, oraz na innych wydziałach PW, np. mechanicznym oraz inżynierii materiałowej, jako literatura uzupełniająca.

Skrypt podzielony jest na dziesięć rozdziałów, ma też dodatek i spis literatury. Każdy rozdział oprócz typowych przykładów zawiera także po kilkadziesiąt zadań do samodzielnego rozwiązania o narastającym stopniu trudności. W dodatku zamieszczone są programy napisane w środowisku programu Mathematica, ilustrujące rozpatrywane zagadnienia. Każdy rozdział ma niezależną numerację wzorów i rysunków. Także w poszczególnych przykładach stosujemy niezależną numerację wzorów. Podobna umowa dotyczy zalecanych ćwiczeń i zadań, które zamieszczane są w podpunktach rozdziału. W przypadku rysunków i wzorów, które będą miały wielokrotne powołania, stosujemy ciągłą ich numerację w danym rozdziale lub podrozdziale.

Składam podziękowania dr. inż. Aleksandrowi Szwedowi, dr. hab. inż. Maciejowi Gajewskiemu, prof. PW, mgr inż. Inez Kamińskiej i mgr. inż. Andrzejowi Piotrowskiemu za wieloletnią współpracę w przygotowaniu merytorycznym i prowadzeniu zajęć z Teorii Sprężystości i Plastyczności.

Notebooki programu Mathematica dotyczące przedstawionych zagadnień w rozdziałach oraz dodatku dostępne będą na stronie internetowej Biblioteki Głównej PW.

Stanisław Jemiolo